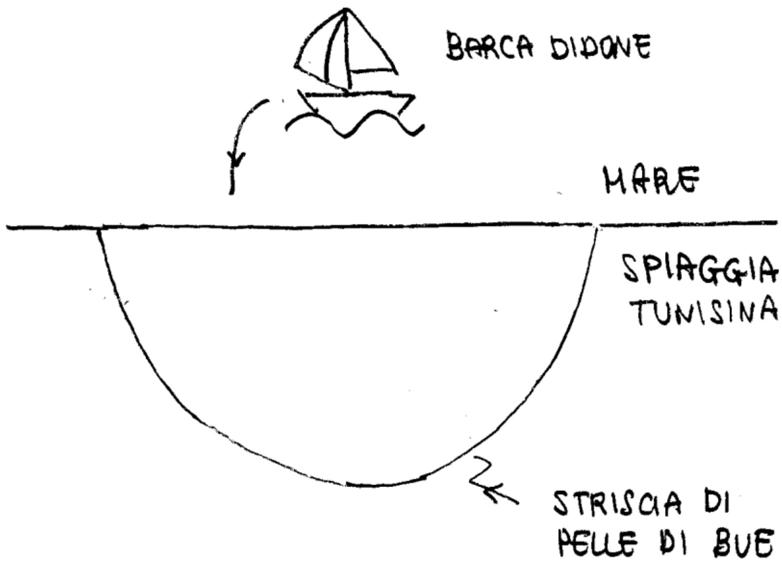
"Il problema di Didone"

Massimo Tarallo – Università degli Studi di Milano

La fondazione di Cartagine nella mitologia

- Didone primogenita di Belo (per altri Muttone), re di Tiro (Libano)
- nella lotta per la successione di Belo, il fratello Pigmalione uccide Schilo, marito e zio di Didone
- Didone lascia Tiro con largo seguito e peregrina per mare alla ricerca di un regno, senza troppa convinzione: alla fine approda sulla costa tunisina
- il re Iarba le consente di stabilirsi sulla costa, prendendo tanto terreno "quanto ne può contenere una pelle di bue (birsa, in greco)"
- Didone fa tagliare la pelle di bue in sottili striscioline e, partendo dall'approdo delle sue navi, riesce con una *semicirconferenza* ad includere la rocca dove sorgerà Cartagine
- Birsa vecchio nome di Cartagine, che in fenicio significa rocca …



- poi arriva Enea a rompere le uova nel paniere … altra storia: vedi Eneide!
- problema: *perché proprio un semicirconferenza e non un'altra figura?*
    - formulazione del problema isoperimetrico:
        - corda di lunghezza *p* fissata
        - estremi della corda liberi di variare sulla riva del mare:
            - curva in generale … ma retta per il problema isoperimetrico!
            - nel seguito indicata come *frontiera* o *bordo* del problema
        - quanta terreno posso inglobare e con quale forma?
    - come i sudditi di Didone, anche i matematici si sono accapigliati per molto tempo sulla sua scelta …
    - ottimalità della semicirconferenza altamente non banale:
        - Adolf Hurwitz 1902 prima dimostrazione completa
        - Jacob Steiner 1841 manovre di simmetrizzazione che caratterizzano la soluzione ottimale

    - impossibile rifare dimostrazione agli studenti … ma la *sperimenteremo*
    - per iniziare, problema isoperimetrico in classi ristrette di curve:
        - rettangoli
        - triangoli

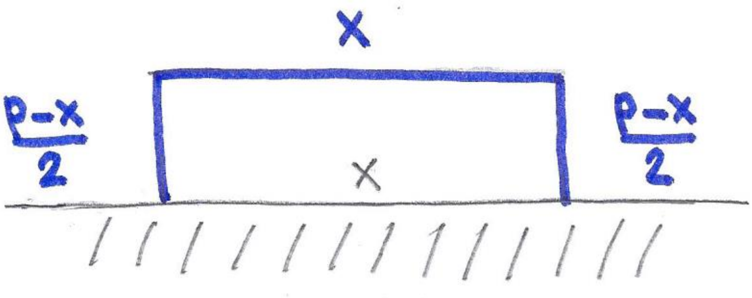
Descrizione apparato sperimentale, da far realizzare agli studenti

- descrizione del materiale:
    - tavola di compensato (almeno formato A3) ricoperto con:
        - foglio gomma crepla 2mm nel mio caso
        - foglio sughero 3-5 mm probabilmente meglio
    - striscia di compensato di lunghezza il lato maggiore della tavola
    - nastro biadesivo
    - sfere metalliche dello stesso diametro 5-7 mm (circa 1000)
    - bilancia al di grammo per pesare sferette
    - cordini 3mm di varia lunghezza
    - puntine con impugnatura
    - fogli bianchi A3, matita, compasso, riga e squadra
    - magnete per raccogliere sferette
- utilizzo dell'apparato per lo studio del problema isoperimetrico:
    - creare frontiera del problema isoperimetrico, fissando tramite nastro biadesivo la striscia di compensato al bordo maggiore della tavola
    - adagiare foglio bianco A3 sulla tavola, appoggiandolo alla striscia di compensato
    - scegliere un cordino, la cui lunghezza p definirà il perimetro di riferimento del problema isoperimetrico
    - fissare gli estremi del cordino, tramite puntine, in prossimità della striscia di compensato:
        - denotare con x la distanza tra le puntine
        - per costruzione $0 \leq x \leq p$
    - dare al cordino la forma desiderata, usando altre puntine se necessario:
        - la forma dalla classe di curve che si intende studiare
        - siamo interessati a calcolare l'area $A = A(x)$ della figura compresa tra cordino e striscia di compensato
    - riempire lo spazio tra cordino e striscia di sferette di metallo e quindi:
        - rimuoverle usando il magnete
        - pesarle ottenendo un peso $Q = Q(x)$ che dipende da x
    - punto chiave: approssimativamente
      $$Q(x) = kA(x)$$
        - costante di proporzionalità k non dipende da x
        - $Q(x)$ ed $A(x)$ hanno gli stessi punti di estremo
    - ripetere il procedimento per un campione significativi di x al fine di localizzare sperimentalmente il massimo di $Q(x)$ e quindi di $A(x)$
    - la presenza di un foglio bianco A3 permetterà nel contempo di
        - tracciare i contorni del cordino ad x fissato
        - dedurre le aree $A(x)$ da misurazioni legate alla traccia

Problema isoperimetrico nella classe dei rettangoli

- usare l'apparato sperimentale (senza sferette) per favorire la modellizzazione del problema:

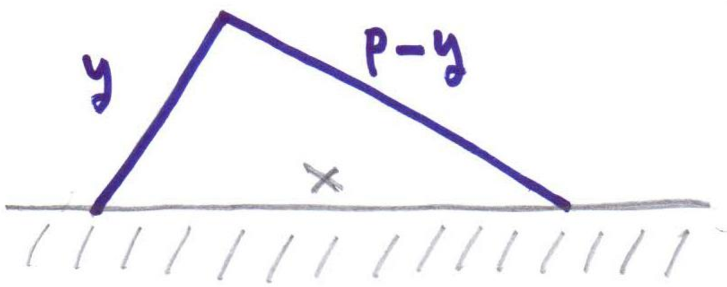
    - fissare cordino sulla frontiera tramite puntine
    - verificare che è possibile costruire un unico rettangolo
- modello matematico risultante:



    - x lunghezza del lato del rettangolo che cade sulla frontiera
    - lunghezza altro lato $(p - x)/2$
    - area $A(x) = x(p - x)/2$
    - ottimizzare nel dominio $0 \leq x \leq p$
- disuguaglianza isoperimetrica nella classe considerata:
    - rettangolo massimale si ottiene per: $x = p/2$
    - area del rettangolo massimale: $p^2/8$
    - quindi per tutti i rettangoli vale la disuguaglianza: $A \leq p^2/8$

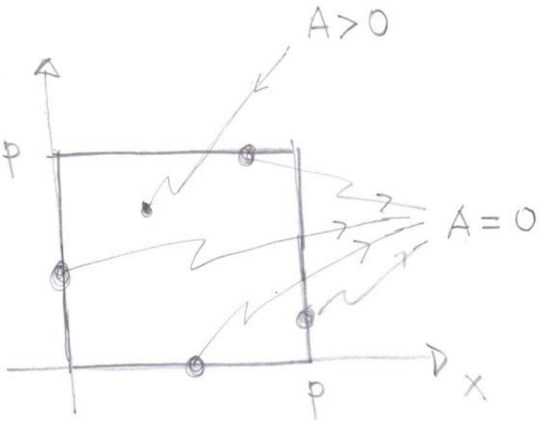
Problema isoperimetrico nella classe dei triangoli

- utilizzare l'apparato sperimentale (con le sferette) per favorire la modellizzazione del problema e poi approcciarlo sperimentalmente:
    - cordino di lunghezza p
    - estremi del cordino fissati alla frontiera:
        - distanza tra gli estremi $0 \leq x \leq p$
        - x lunghezza della *base* del triangolo
    - $x = 0$ ed $x = p$ corrispondono a triangoli degeneri, di area nulla
    - quando $0 < x < p$ vari triangoli sono costruibili con aree diverse:
        - fissare vertice
        - denotare con y la lunghezza di uno dei due lati:
            - per costruzione $0 \leq y \leq p$
            - altro lato di lunghezza $p - y$
        - unico triangolo per x, y assegnati!



    - area del triangolo $A = A(x, y)$

        - continua sul quadrato $[0,p]^2$
        - nulla sui bordi del quadrato
        - da massimizzare sul quadrato



    - due variabili sono troppe:
        - dobbiamo eliminarne una per poi ottimizzare nella variabile residua
        - strategia: eliminare y massimizzando $A(x,y)$ ad x fissata
        - da $A(x,0) = 0 = A(x,p)$ si deduce che:
            - massimo esiste
            - è assunto in $0 < y < p$
    - di seguito, quattro diversi approcci alla strategia designata

- approccio sperimentale con sferette alla massimizzazione di $y \to A(x,y)$
    - scegliere un buon campione di $0 < y < p$ che contenga $y = p/2$
    - per ognuno di tali y inserire quante più sferette possibili nel triangolo, <u>senza però deformarne i bordi</u>

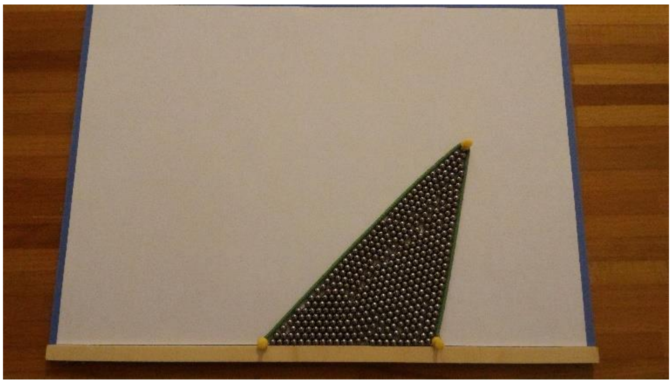


Figura 1- triangolo non ottimale

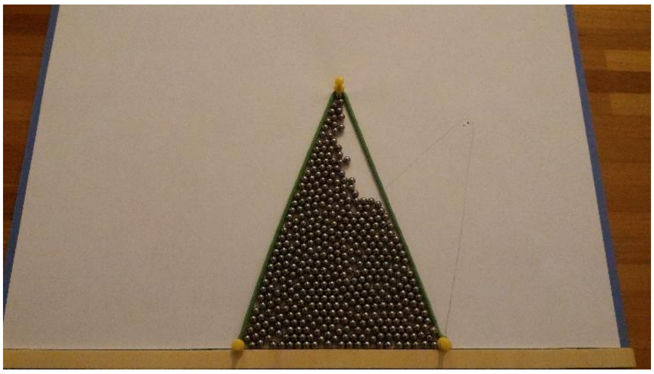
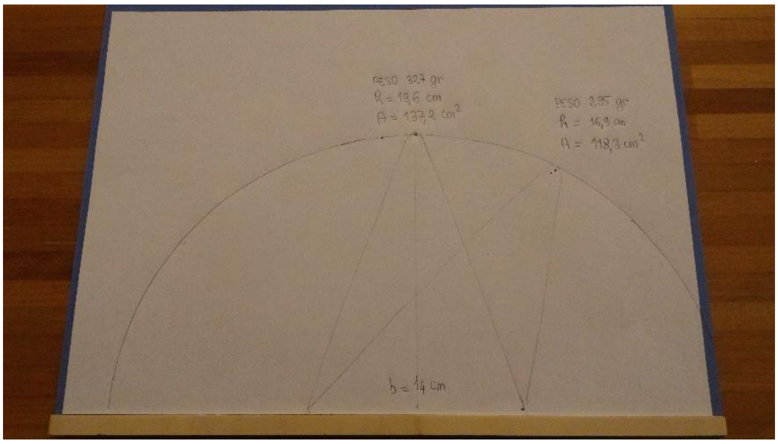


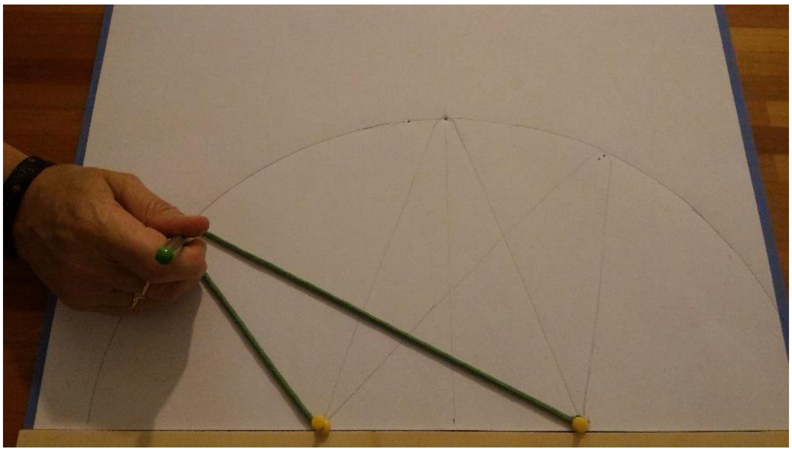
Figura 2- triangolo isoscele con le stesse sferette del non ottimale di Figura 1

    - rimuovere le sferette e pesarle ottenendo $Q(x,y)$
    - fare un grafico per punti della funzione $y \to Q(x,y)$ che:
        - evidenzi monotonia
        - localizzi approssimativamente il punto di massimo in $y = p/2$

- approccio sperimentale senza sferette alla massimizzazione di $y \to A(x, y)$
    - scegliere un buon campione di y che contenga $y = p/2$
    - per ognuno di tali y:
        - tracciare il triangolo corrispondente seguendo il bordo del cordino
        - disegnare altezze tramite squadra
        - misurare altezza e dedurre area $A(x, y)$
    - fare un grafico per punti della funzione $y \to A(x, y)$ che:
        - evidenzi monotonia
        - localizzi approssimativamente il punto di massimo in $y = p/2$



- approccio geometrico alla massimizzazione di $y \to A(x, y)$
    - eliminare puntina del vertice
    - tendere il cordino dall'interno tramite una matita
    - disegnare la curva che si viene a formare muovendo la matita



    - riconoscere la curva: *ellisse di cui le puntine sono i fuochi*
    - conclusione:
        - altezza massima quando il vertice si trova sull'asse della base
        - *triangolo isoscele*

- approccio analitico alla massimizzazione di $y \to A(x, y)$
    - perimetro totale del triangolo $= p + x$
    - dalla formula di Erone:

$$A(x,y)^2 = \frac{p+x}{2}\left(\frac{p+x}{2} - x\right)\left(\frac{p+x}{2} - y\right)\left(\frac{p+x}{2} - p + y\right)$$

$$= \frac{1}{16}\ (p^2 - x^2)\,\{x^2 - \ (p-2y)^2\}$$

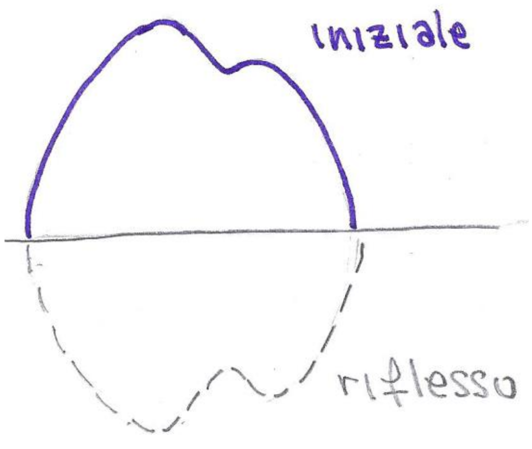
- massimizzare area al quadrato per $0 \le y \le p$
  - derivata in y:
    $$\frac{1}{8}\ (p^2 - x^2)(p - 2y)$$
  - studio del segno e massimo in $y = p/2$

- conclusione da ritenere ad x fissato, indipendentemente dall'approccio seguito:
  - il massimo di $A(x,y)$ al variare di $0 \le y \le p$ si ottiene per $y = p/2$
  - in altre parole, il triangolo ottimale è isoscele

- massimizzazione finale al variare della base $0 \le x \le p$
  - disegnare triangolo isoscele di lato $p/2$
  - calcolare altezza tramite Pitagora: $h(x) = \sqrt{p^2 - x^2}/2$
  - calcolare area del triangolo isoscele:
    $$A(x) = A(x, p/2) = \ x\sqrt{p^2 - x^2}/4$$
  - derivare $A(x)$ e determinare punto massimo: $x = p/\sqrt{2}$
  - area massima: $p^2/8$
    - la stessa dei rettangoli!
    - caso fortuito o ragione profonda?

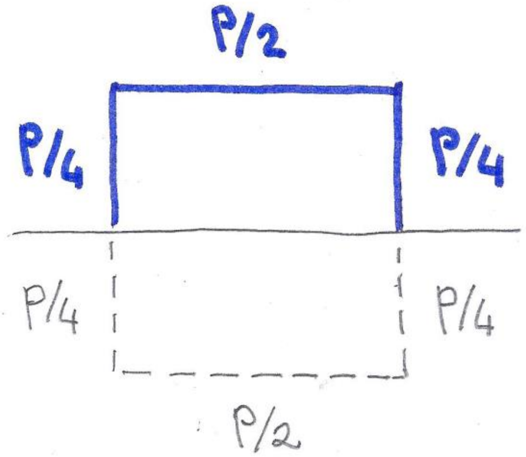
Comparazione dei risultati ottenuti per rettangoli e triangoli

- riflessione attraverso la frontiera:
  - dopo aver disegnato un profilo per il cordino:
    - disegnare il profilo riflesso
    - profilo simmetrico, unendo quello inziale ed il riflesso



  - sono fatti equivalenti:
    - il profilo iniziale è massimale per perimetro p *con frontiera*
    - profilo simmetrico è massimale per perimetro $2p$ *senza frontiera*

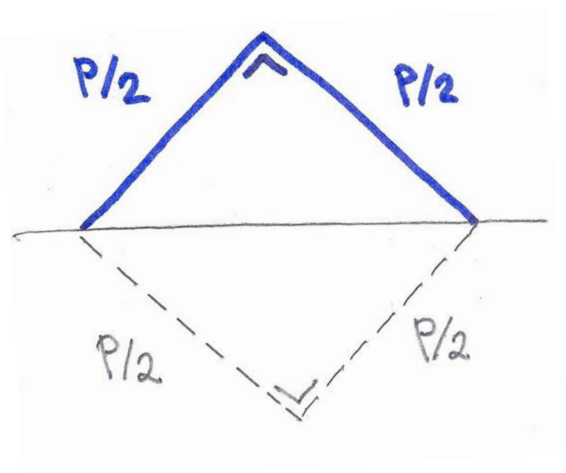
  - riesaminiamo alla luce di ciò i profili ottimali ottenuti per rettangoli e triangoli
- simmetrizzando rettangolo ottimale:
  - ricordare che rettangolo ottimale ha lati:
    - orizzontale di lunghezza $p/2$
    - verticale di lunghezza $p/4$
  - quindi il suo simmetrizzato ha lati:
    - orizzontale di lunghezza $p/2$
    - verticale di lunghezza $p/2 + p/2 = p/4$
  - quadrato di lato $p/2$ con frontiera come asse!



- simmetrizzando triangolo ottimale:
  - ricordare che triangolo ottimale:
    - è isoscele di lato $p/2$
    - la base misura $p/\sqrt{2}$
    - osservare che:

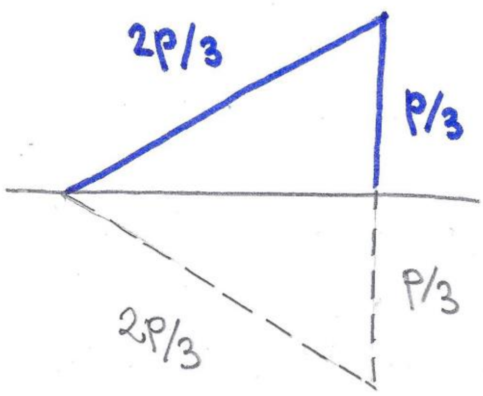
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2$$

    - quindi si tratta di un triangolo rettangolo nel vertice opposto alla base
  - simmetrizzando: quadrato di lato $p/2$ con frontiera come diagonale!



- stesso quadrato per rettangoli e per triangoli: *perché?*
  - enunciare risultati di ottimizzazione per perimetro $2p$ senza frontiera:
    - nella classe dei quadrilateri: area massima per quadrato di lato $p/2$
    - nella classe dei triangoli: area massima per triangolo equilatero di lato $2p/3$

- problema: perché l'ottimizzazione nella classe dei triangoli, per perimetro p con frontiera, non ha preferito il profilo in figura?



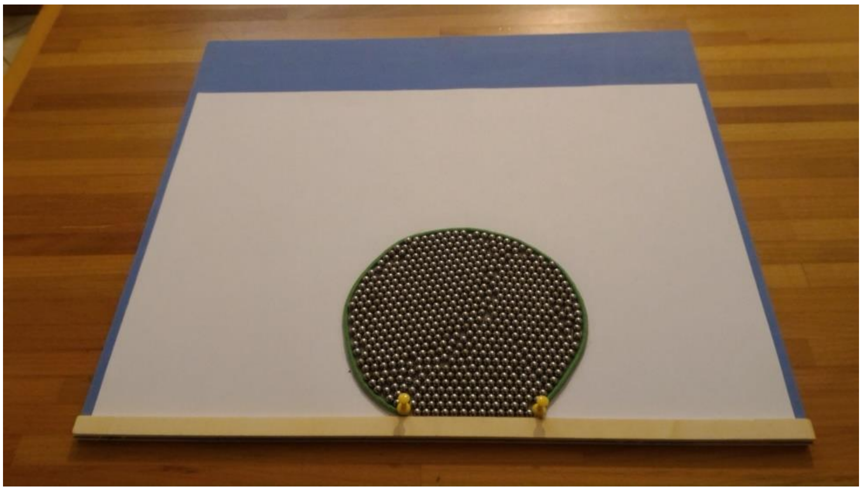
- la risposta più efficace sta nelle disuguaglianze isoperimetriche senza frontiera, relative al perimetro $2p$:
  - nella classe dei triangoli: $A \leq p^2/3\sqrt{3}$
  - nella classe dei quadrilateri: $A \leq p^2/4$
  - seconda meglio della prima: col quadrato racchiudo più area!

Sperimentazione del problema isoperimetrico libero

- utilizzare l'apparato sperimentale *senza fissare a priori il tipo di profilo!*
- scegliere cordino di lunghezza p e ripetere le seguenti operazioni per i valori di x:

$$0 < \frac{p}{4} < \frac{p}{3} < \frac{p}{2} < \frac{2p}{3} < \frac{3p}{4} < p$$

  - fissare ad una distanza x gli estremi del cordino alla frontiera/striscia di compensato
  - riempire con le sferette la zona tra cordino e striscia di compensato:
    - aggiungendo sferette il profilo della corda cambia
    - *aggiungere sferette fino ad arrivare alla massima capienza!*
    - di seguito foto del caso $x \approx p/4$



  - tracciare il profilo finale del cordino sul foglio A3

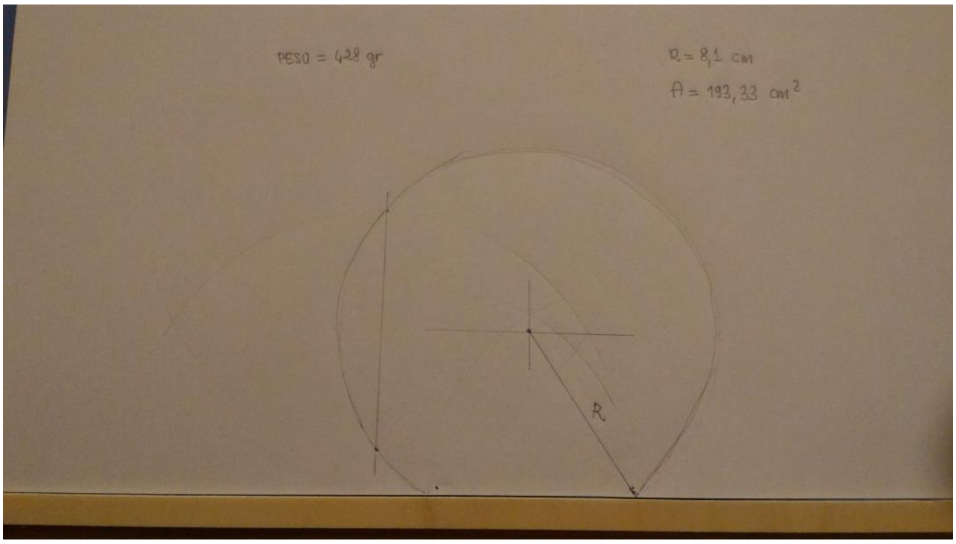
- rimuovere le sferette tramite il magnete e pesarle sulla bilancia: peso $Q(x)$
- sostituire il foglio A3 utilizzato con un nuovo foglio A3

- tracciare un grafico per punti della funzione $Q(x)$
  - dalle misurazioni emerge che:

$$Q(0) < Q\left(\frac{p}{4}\right) < Q\left(\frac{p}{3}\right) < Q\left(\frac{p}{2}\right) < Q\left(\frac{2p}{3}\right)$$
$$Q\left(\frac{2p}{3}\right) > Q\left(\frac{3p}{4}\right) > Q(p) = 0$$

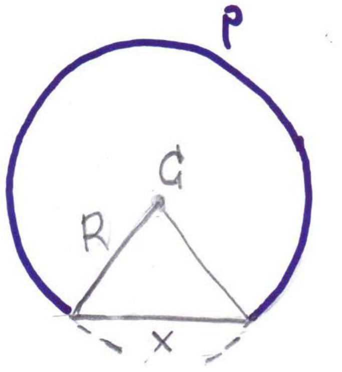
  - sembra ragionevole concludere che $Q(x)$ sia unimodale con:
    - crescita in $[0, p/2]$
    - decrescita in $[3p/4, p]$
    - punto di massimo nell'intervallo $[p/2, 3p/4]$ cui $2p/3$ appartiene
- problemi da studiare per ottimizzare l'area $A(x)$ racchiusa dal profilo:
  - *localizzazione precisa del punto di massimo di $Q(x)$*
  - *forma del profilo corrispondente al punto di massimo*
- forma del profilo di massima capienza ad x fissato:
  - intuizione suggerisce trattarsi di un *arco di circonferenza* e precisamente:
    - intera circonferenza se $x = 0$
    - arco *maggiore* se $x = p/4\,, p/3\,, p/2$
    - arco *minore* se $x = 2p/3\,, 3\,p/4$
    - arco degenere di una circonferenza infinita nel caso $x = p$
  - dimostrazione analitica molto difficile!
  - verifica sperimentale tramite traccia su foglio A3 del profilo di massima capienza corrispondente al valore di x considerato!
  - determinare graficamente centro $C(x)$ della ipotetica circonferenza:
    - il tratto di frontiera interessato è una corda
    - disegnare seconda corda
    - usare compasso per determinare gli assi delle due corde
    - $C(x)$ = intersezione degli assi

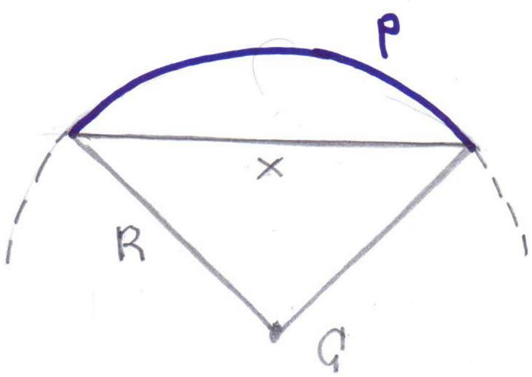
Figura 4 x = p/4 circa (arco maggiore)



  - puntare compasso in $C(x)$ e quindi:
    - regolare apertura compasso sulla distanza di $C(x)$ dagli estremi delle corde
    - verificare che tutti gli altri punti del profilo si trovano (approssimativamente) alla medesima distanza da $C(x)$

            - misurare apertura compasso: raggio $R(x)$ della circonferenza
    - peculiarità del caso di arco minore:
        - il centro $C(x)$ si trova oltre la frontiera e quindi fuori dal foglio A3
        - per effettuare la costruzione di $C(x)$:
            - unire secondo foglio A3 lungo la frontiera, tramite nastro adesivo
            - oppure utilizzare fin dall'inizio un foglio A2 ripiegato in due …
- localizzazione sperimentale del punto di massimo dell'area $A(x)$
    - dati raccolti sembrano suggerire che massimo di $Q(x)$ si trovi in $[p/2, 3p/4]$
    - *cambiamenti geometrici in tale intervallo?*
        - profilo descritto dal cordino passa da arco maggiore ad arco minore
        - nel mezzo, il caso di profilo che descrive *semicirconferenza*
    - congettura ragionevole: massimo raggiunto nella x che realizza semicirconferenza
        - equazione che definisce semicirconferenza: $\pi x/2 = p$
        - soluzione $x = 2p/\pi$ e quindi profilo cordino descrive:
            - arco maggiore se $0 \leq x < 2p/\pi$
            - arco minore se $2p/\pi < x \leq p$
    - come condurre verifica sperimentale di $Q(2p/\pi) > Q(x)$ per ogni $x \neq 2p/\pi$:
        - ripetere esperimento iniziale quando estremi cordino distano $x = 2p/\pi$
        - isolare dalle altre le sferette utilizzate per raggiungere massima capienza
        - quindi operare come segue:
            - cambiare a piacere la distanza x tra estremi cordino
            - sferette isolate bastano a raggiungere massima capienza!
        - opportuno provare:
            - valori di x minori ma prossimi a $2p/\pi$
            - il valore $2p/3$ maggiore ma molto prossimo a $2p/\pi$ (*confronto più facile se p grande rispetto a dimensione sferette*)
- procedura sperimentale alternativa di ottimizzazione
    - invece dei pesi $Q(x)$ misurati durante approccio sperimentale:
        - utilizzare raggi $R(x)$ misurati durante lo stesso approccio
        - calcolare direttamente area $A(x)$ tramite $R(x)$
    - per calcolare $A(x)$ occorre distinguere due casi:
        - $0 \leq x \leq 2p/\pi$ ovvero p arco maggiore
        - $2p/\pi < x \leq p$ ovvero p arco minore





- ingredienti comuni:
  - settore circolare di lunghezza p ed area:
$$A_S(x) = \frac{1}{2} p\, R(x)$$
  - triangolo al centro di base x ed area:
$$A_T(x) = \frac{1}{4} x \sqrt{4R(x)^2 - x^2}$$
- settore e triangolo vanno composti differentemente nei due casi:
  - se $0 \le x \le 2p/\pi$ vanno uniti ottenendo:
$$A(x) = A_S(x) + A_T(x) = \frac{1}{2} pR(x) - \frac{1}{4} x \sqrt{4R(x)^2 - x^2}$$
  - se $2p/\pi < x \le p$ vanno sottratti ottenendo:
$$A(x) = A_S(x) - A_T(x) = \frac{1}{2} pR(x) - \frac{1}{4} x \sqrt{4R(x)^2 - x^2}$$
- usando i raggi $R(x)$ misurati sperimentalmente, verificare che per $x \neq 2p/\pi$:
$$A(x) < A\left(\frac{2p}{\pi}\right) = \frac{p^2}{2\pi}$$

- simmetrizzando attraverso la frontiera:
  - profilo ottimale genera circonferenza di perimetro $2p$
  - tale circonferenza deve essere ottimale per problema senza frontiera di perimetro $2p$
  - già verificato sperimentalmente:
    - per perimetro p invece che $2p$ …
    - vedere sperimentazione precedente per $x = 0$!

- *Trattazione analitica possibile?*
  - profili ad x fissato sono *segmenti circolari*
    - dimostrazione analitica complicata!
    - dimostrazione geometrica fattibile, tramite *simmetrizzazioni di Steiner*
  - calcolo area $A(x)$ del segmento circolare in funzione di x, p
    - vero problema: calcolo di $R(x)$
    - equazione che definisce *implicitamente* $R(x)$
$$\frac{x}{2R(x)} = \sin\left(\frac{p}{2R(x)}\right)$$
    - nessuna formula risolutiva / inesprimibile tramite funzioni elementari!
    - possibile approssimazione per via numerica
  - *studio monotonia $A(x)$ tramite metodi di funzioni implicite:*
    - forse possibile
    - certamente difficile!