“Laboratorio su lattine ottimali”

Massimo Tarallo – Università degli Studi di Milano

Cominciare con *ottimo = minor materiale*

- materiale omogeneo: costo materiale proporzionale a superficie
- variabili che definiscono cilindro:
  - raggio di base r
  - altezza h
- esprimere superficie e volume cilindro tramite tali variabili:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \qquad\qquad V = \pi r^2 h$$

Studio set iniziale di 5 cilindri

- misurare diametri ed altezze in centimetri tramite righello e calibro
- calcolare superfici e volumi, senza esplicitare π
- prodotto finale la seguente tabella:

CILINDRO	r	h	S	V
VIOLA	1	16	34 π	16 π
BLU	1,5	7,1	25,8 π	15,975 π
ROSSO	2	4	24 π	16 π
ROSA	3	1,8	28.8 π	16,200 π
VERDE	4	1	40 π	16 π

- quale cilindro migliore?
  - cilindri tutti di ugual volume (approssimativamente)
  - conviene minor superficie: cilindro rosso

- caratteristiche geometriche cilindro rosso:
  - altezza = diametro

- introdurre parametro di *forma*: $\lambda = h/r$
- aggiungere λ alla tabella, individuando $\lambda = 2$ come forma ottimale

CILINDRO	r	h	$\lambda = h/r$	S	V
VIOLA	1	16	16	$34\,\pi$	$16\,\pi$
BLU	1,5	7,1	4,73	$25{,}8\,\pi$	$15{,}975\,\pi$
ROSSO	2	4	2	$24\,\pi$	$16\,\pi$
ROSA	3	1,8	0,60	$28.8\,\pi$	$16{,}200\,\pi$
VERDE	4	1	0,25	$40\,\pi$	$16\,\pi$

Set aggiuntivo di 2 cilindri

- problema: *quale cilindro migliore*
  - *tra i nuovi due?*
  - *tra tutti e sette i cilindri?*
- *volume diverso*, come confrontare?
- esempio formaggio:
  - primo negozio: 4 etti a 2.50 euro
  - secondo negozio: 5 etti a 3 euro
  - quale negozio più conveniente?

- normalizzazione S/V e tabella complessiva:

CILINDRO	r	h	$\lambda = h/r$	S	V	S/V
VIOLA	1	16	16	34 π	16 π	2,125
BLU	1,5	7,1	4,73	25,8 π	15,975 π	1,615
ROSSO	2	4	2	24 π	16 π	1,500
ROSA	3	1,8	0,60	28.8 π	16,200 π	1,778
VERDE	4	1	0,25	40 π	16 π	2,500
VERDE ACQUA	4	4	1	64 π	64 π	1,000
GIALLO	3	6	2	54 π	54 π	1,000

- ***punto chiave:*** *abbiamo perso la forma ottimale!*
  - cilindri VERDE ACQUA e GIALLO
    - hanno forme diverse
    - stesso rapporto S/V
  - cilindro ROSSO
    - stessa forma del GIALLO
    - rapporto S/V peggiore!
- domanda/conclusione naturale: *la forma ottimale dipende dal volume?*

Ottimizzazione a volume fissato … ma arbitrario!

- minimizzare S quando $V > 0$ fissato:
  - da vincolo volume ricavare:

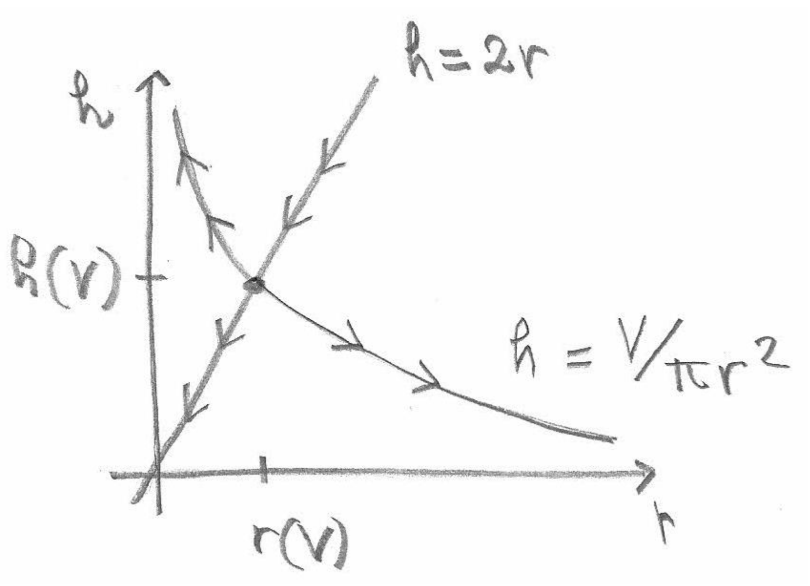
$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

- sostituire in S ottenendo funzione:
$$s_V(r) = S\big(r, h(r)\big) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$
- obiettivo: minimizzare $s_V(r)$ al variare di $r > 0$
- derivata:
$$s_V{}'(r) = \frac{2}{r^2}\,(2\pi r^3 - V)$$
- segno derivata e determinazione punto di minimo:
$$r(V) = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

- conclusione:
  - altezza corrispondente al raggio ottimale:
$$h(V) = \frac{V}{\pi r(V)^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$
  - forma ottimale:
$$\lambda(V) = \frac{r(V)}{h(V)} = 2$$
    - contrariamente alle attese, indipendente dal volume V!
    - *come si spiega il paradosso?*

Soluzione del paradosso

- i cilindri con $\lambda = 2$ in realtà non sono minimi per S/V:



- le frecce nel grafico puntano verso valori crescenti del rapporto S/V

- il cilindro individuato da $r(V)$ ed $h(V)$:
  - è di minimo lungo la curva di equazione $V = \pi r^2 h$
  - non è di minimo lungo la retta di equazione $h = 2r$
- dimostrazione della seconda affermazione:
  - per ogni $V > 0$ risulta $h(V) = 2r(V)$ per ogni
  - su tale retta la funzione S/V è decrescente:

$$\frac{S(r(V),h(V))}{V(r(V),h(V))} = \frac{s(r(V))}{V} = 3\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}$$

- questo mostra anche che S/V può diventare arbitrariamente piccolo …

- il minimo di S/V in realtà non esiste:
  - riscrivere rapporto S/V in forma semplificata:

$$\frac{S}{V} = 2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h}\right)$$

  - per $r, h \to \infty$ risulta $S/V \to 0$
  - quindi:
    - S/V ha estremo inferiore nullo al variare di $r, h > 0$
    - estremo inferiore non raggiungibile con $r, h > 0$

- individuazione delle cause del problema:
  - prezzo formaggio proporzionale al peso
  - *superficie non può essere proporzionale al volume!*
    - unità di misura diverse
    - nel calcolo di S/V si dividono cq per cc

- approccio dimensionale alla soluzione: *esistono α per i quali S è proporzionale a V^α?*
  - riscalare un dato cilindro di un fattore $c > 0$
  - come riscalano superficie e volume?
    - S proporzionale a c^2
    - V proporzionale a c^3
  - unico valore possibile: $\alpha = 2/3$

- il valore $\alpha = 2/3$ rimette effettivamente a posto le cose?
  - aggiornare tabella:

CILINDRO	r	h	$\lambda = h/r$	S	$V^{2/3}$	$S/V^{2/3}$
VIOLA	1	16	16	34 π	6,350 $\pi^{2/3}$	5,354 $\pi^{1/3}$
BLU	1,5	7,1	4,73	25,8 π	6,343 $\pi^{2/3}$	4,067 $\pi^{1/3}$
ROSSO	2	4	2	24 π	6,350 $\pi^{2/3}$	3,780 $\pi^{1/3}$
ROSA	3	1,8	0,60	28.8 π	6,402 $\pi^{2/3}$	4,499 $\pi^{1/3}$
VERDE	4	1	0,25	40 π	6,350 $\pi^{2/3}$	6,299 $\pi^{1/3}$
VERDE ACQUA	4	4	1	64 π	16,000 $\pi^{2/3}$	4,000 $\pi^{1/3}$
GIALLO	3	6	2	54 π	14,287 $\pi^{2/3}$	3,780 $\pi^{1/3}$

  - conclusioni:
    - cilindro VERDE ACQUA non più ottimale
    - cilindri ROSSO e GIALLO ugualmente ottimali!
  - fatto limitato ai cilindri in tabella oppure fatto generale?

Disuguaglianza isoperimetrica

- introdurre il nuovo rapporto:

$$\frac{S}{V^{2/3}} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi r h}{(\pi r^2 h)^{2/3}}$$

- manipolare rapporto, fattorizzando r^2 e poi semplificandolo:

$$\frac{S}{V^{2/3}} = \frac{r^2\left(2\pi + 2\pi\,\frac{h}{r}\right)}{r^2\,\left(\pi\frac{h}{r}\right)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\pi}\;\frac{1+\frac{h}{r}}{\left(\frac{h}{r}\right)^{2/3}}$$

  - non dipende da r, h separatamente
  - vera variabile: parametro di forma $\lambda = h/r$

- minimizzare al variare di $\lambda > 0$ la funzione:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1+\lambda}{\lambda^{2/3}}$$

  - limiti al bordo: $\varphi(0^+) = \varphi(+\infty) = +\infty$
  - derivata:

$$\varphi'(\lambda) = \frac{\lambda - 2}{3\lambda^{5/3}}$$

  - segno derivata: $\lambda = 2$ unico punto di minimo
  - quota del minimo: $\varphi(2) = 3/\sqrt[3]{4}$

- concludere esplicitando *disuguaglianza isoperimetrica*:
  - ogni cilindro soddisfa:

$$\frac{S}{V^{2/3}} \geq \sqrt[3]{54\pi}$$

  - uguaglianza vale solo per i cilindri con $h = 2r$
  - chiave di lettura della disuguaglianza
    - racchiudere un certo volume costa *almeno* una certa superficie
    - nome disuguaglianza deriva da lettura duale

- *divagazione:* esistono solidi più convenienti del cilindro ottimale?
  - per un cubo $S/V^{2/3} = 6 = \sqrt[3]{216} > \sqrt[3]{54\pi}$ … peggiore!
  - per una sfera $S/V^{2/3} = \sqrt[3]{36\pi} < \sqrt[3]{54\pi}$ … migliore!

Fornire esempi di lattine/scatolette reali

LATTINA	r	h	$\lambda = h/r$
Olive	3,25	7,20	2,22
Tonno	3,25	3,20	0,98
Fagioli	3,25	6,50	2,00
Concentrato pomodoro	2,75	7,30	2,65
Coca-cola vecchia	3,30	10,20	3,09
Coca-cola nuova	2,90	13,20	4,55
Birra	3,30	15,40	4.67

- forma molto variabile, quali possono essere i motivi?
- proposte di modifica al modello:
  - scarti nella lavorazione dei tappi
  - costi diversi per tappi e superficie laterale
  - costo delle saldature tra i diversi pezzi
- diversi modelli di saldatura:
  - bordo tappi + giuntura laterale
  - imbutitura + saldatura del tappo restante

Studio lattina ottenuta per imbutitura

- tipico delle lattine utilizzare per le bibite
- definizione costo di produzione:
  - tralasciamo costo scarti
  - costo materiale: $C_m = c_m\, S$
  - costo saldatura: $C_s = c_s\, L$ dove L perimetro unico tappo
  - costo totale: $C = C_m + C_s$
- obiettivo: minimizzare costo C a volume V fissato

- ritentare approccio precedente: *a che potenza di V è proporzionale C?*

- riscalare un dato cilindro di un fattore $c > 0$
- volume proporzionale a c^3 come prima
- come riscala costo totale?
  - C_m proporzionale a c^2 come prima
  - C_s proporzionale a c
  - C non proporzionale a nessuna potenza di c
- nessuna speranza di trovare α tale che C/V^α indipendente da c

- conseguenza attesa: *dipendenza dal volume del cilindro ottimale!*

- impostare problema abbandonando i quozienti:
  - conviene utilizzare variabili non standard per descrivere il cilindro:
    - parametro di forma $\lambda = h/r$
    - volume $V = \pi r^2 h$
  - raggio ed altezza del cilindro si ottengono dalle nuove variabili:

$$r = \left(\frac{V}{\pi\lambda}\right)^{1/3} \qquad\qquad h = \lambda\left(\frac{V}{\pi\lambda}\right)^{1/3}$$

  - costo materiale in funzione delle nuove variabili:

$$C_m = c_m S = c_m\{2\pi r^2 + 2\pi rh\} = 2\pi c_m(1+\lambda)\left(\frac{V}{\pi\lambda}\right)^{2/3}$$

  - costo saldatura nelle nuove variabili:

$$C_s = c_s L = c_s 2\pi r = 2\pi c_s\left(\frac{V}{\pi\lambda}\right)^{1/3}$$

  - costo totale nelle nuove variabili:

$$C = C_m + C_s = 2\pi c_m\, \varphi(\lambda, V)$$

    - funzione φ è definita come segue:

$$\varphi(\lambda, V) = (1+\lambda)\left(\frac{V}{\pi\lambda}\right)^{2/3} + k\left(\frac{V}{\pi\lambda}\right)^{1/3}$$

    - il coefficiente $k = c_s/c_m$ esprime quanto costa la saldatura rispetto al materiale:
      - $k = 0$ significa assenza di saldature
      - k piccolo/grande significa saldatura poco/tanto influente
      - nel seguito $k > 0$

- obiettivo: *per V assegnato, minimizzare* $\varphi_V(\lambda) = \varphi(\lambda, V)$
  - limiti al bordo: $\varphi_V(0^+) = \varphi_V(+\infty) = +\infty$
  - calcolo derivata:

$$\varphi_V'(\lambda) = \frac{1}{3\lambda}\left(\frac{V}{\pi\lambda}\right)^{1/3}\left\{\left(\frac{V}{\pi\lambda}\right)^{1/3}(\lambda - 2) - k\right\}$$

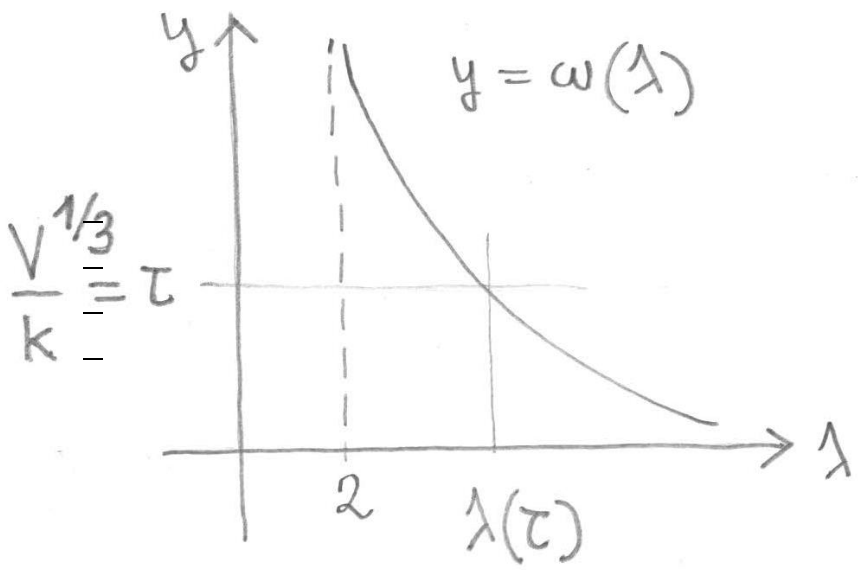
- segno derivata per $0 < \lambda \leq 2$: $\varphi'_V(\lambda) < 0$
- segno derivata per $\lambda > 2$:
  - $\varphi'_V(\lambda) \geq 0$ equivalente a $\left(V/_{\pi\lambda}\right)^{1/3} \geq k/_{\lambda - 2}$
  - riscrivere disequazione separando variabile da parametri:

$$\tau = \frac{V^{1/3}}{k} \geq \frac{(\pi\lambda)^{1/3}}{\lambda - 2} = \omega(\lambda)$$

  - comportamento della funzione $\omega(\lambda)$ per $\lambda > 2$:
    - limiti al bordo: $\omega(2^+) = +\infty$ ed $\omega(+\infty) = 0^+$
    - derivata:

$$\omega'(\lambda) = -\frac{2\pi^{\frac{1}{3}}(\lambda + 1)}{3\lambda^{\frac{2}{3}}(\lambda - 2)^2} < 0 \qquad \forall \lambda > 2$$

  - discussione grafica:



    - *esiste unico $\lambda(\tau) > 2$ come in figura*
    - $\varphi'_V(\lambda) \geq 0$ se e solo se $\lambda \geq \lambda(\tau)$

- monotonia di $\varphi_V(\lambda)$:
  - strettamente decrescente per $0 < \lambda \leq \lambda(\tau)$
  - strettamente crescente per $\lambda \geq \lambda(\tau)$
  - $\lambda = \lambda(\tau)$ unico punto di minimo assoluto

- conclusioni:
  - la forma ottimale non è decisa separatamente dal volume V e dalla costante $k = c_s/c_m$ ma da una loro combinazione:

$$\tau = \frac{V^{1/3}}{k}$$

        - τ *grande* quando ad esempio:
            - volume V grande
            - k piccolo (ovvero saldatura costa poco)
        - τ *piccolo* quando ad esempio:
            - volume V piccolo
            - k grande (ovvero saldatura costa molto)
    - la forma ottimale $\lambda = \lambda(\tau) > 2$ è determinata come l'unica soluzione dell'equazione:

$$\omega(\lambda) = \tau$$

    - dall'andamento della funzione ω segue che:
        - se $\tau \rightarrow +\infty$ allora:
            - $\lambda(\tau) \rightarrow 2^+$
            - si torna alla forma ottimale senza saldature!
        - se $\tau \rightarrow 0^+$ allora:
            - $\lambda(\tau) \rightarrow +\infty$
            - la forma ottimale sia allunga a dismisura!
    - equazione $\omega(\lambda) = \tau$ difficile da risolvibile analiticamente:
        - facile invece decidere quale τ fornisca un λ assegnato
        - assegnati V, λ possiamo ricavare quanto debba valere k

$$k = (\lambda - 2)\sqrt[3]{\frac{V}{\pi\lambda}}$$

        - ricordare significato di $k = c_s/c_m$: saldare 1cm di lattina costa come k cm^2 di materiale
    - *quali k giustificherebbero la forma reale delle lattine di bibite?*
        - misuriamo λ reale e volume V reale della lattina
        - il λ ottimale per il volume V dipende da k
        - per quale k il valore di λ ottimale coinciderebbe con quello reale?

LATTINA	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{k}$
Coca-cola vecchia	3,52	348,96	3,60
Coca-cola nuova	4,97	348,75	7,40
Birra	5,06	526,86	8,80

- commento sulle lattine di Coca-cola:
    - $k = 3{,}60$ della vecchia lattina forse giustificabile
    - materiale vecchia lattina = materiale nuova lattina
    - $k = 7{,}40$ della nuova lattina non giustificabile!
    - ragione commerciale per la forma nuova: *dimensione media della mano nella fascia 11-14 anni*